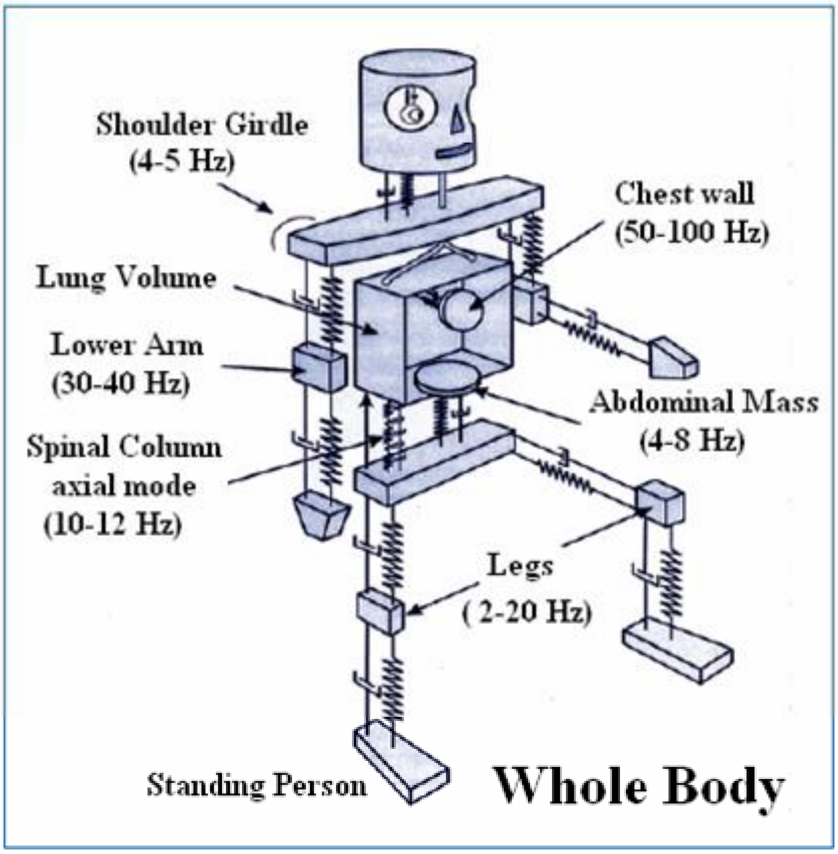
Mechanikai rezgések, rezonancia



Az emberi testben mechanikai rezgések keletkezhetnek, terjedhetnek és csillapodhatnak (tűnhetnek el). Már 1761-ben bevezették az orvosi vizsgálatokba a beteg kopogtatásának (*perkusszió*) módszerét (L. Auenbrugger), amelynek során a rezgésbe hozott szövetrészek sajátrezgéseiből (intenzitás és hangmagasság) lehet kóros elváltozásokra következtetnie a gyakorlott és érzékenyített hallású orvosnak. Külső mechanikai rezgéseknek kitett emberek első szisztematikus orvosi vizsgálatait A Hamilton (1918) végezte olyan munkásoknál, akik köveket törtek sűrített levegővel működő légkalapáccsal. A felugró, majd a talajra visszaérkező sportoló (pl. kosár- és kézilabdázó) testében (csillapodó) rezgések ébrednek, amelyek igénybe veszik az emberi test tartó- és mozgatószerkezeteit. Ha lézerrel szaruhártya-szobrászatot (ablációt) végeznek el, elkerülhetetlenül mechanikai *lökéshullám*ok keletkeznek, és verődnek vissza a szem belsejének zárt üregében, amelyek az egészségre károsak lehetnek (erről szívesen elfeledkeznek a „dobja el a szemüvegét” program munkatársai). Hasonló rezgéssel, ill. az ezzel együttjáró lökéshullám hatásaival kell számolni a koponyába zárt, alapvetően folyékony halmazállapotú agyban, amikor kivülről mechanikai behatás (tartós rázkódás (pl. munkagépen), vagy hirtelen ütés (baleset, ökölvívásban KO)) éri. A külső kényszerrel kiváltott, *ú.n. kényszerrezgések* mellett a testrészeknek *saját* (rezonancia) *rezgései* is vannak, amelyek az alacsony frekvenciák tartományába esnek. Olyan alacsony frekvenciájú (< 20 Hz) rezgésekre is rezonálhatnak, amelyekhez tartozó hanghullámokat (infrahangokat) nem is halljuk a fülünkkel, ezért nagyon alattomos károsító hatást fejthetnek ki (épület-rázkódás, szélkerék-monstrumok, stb.). A testrészek mechanikai csatolásban állnak egymással. Rugalmas (elasztikus) és csillapító (viszkoelasztikus) elemek kapcsolódnak bonyolult hálózattá (lásd az ábrát). Az előadás elsősorban az előbbi, a rugalmas elem (a rugó) fizikájával foglalkozik, de a csillapítás fizikai alapjait is megemlítjük.

Definíciók. Szigorú (matematikai) értelemben *rezgés*nek nevezünk minden olyan fizikai jelenséget, amely az idővel szakaszosan (periodikusan) ismétlődik.

$$g(t) = g(t+T)$$

Itt $g(t)$ a fizikai mennyiségnek a t-edik időpontban felvett értékét jelenti. A *periódusidő* (rezgésidő, T) az a legkisebb időtartam, amelynek elmúltával a fizikai mennyiség ismét ugyanezt az értéket veszi fel. A reciprokát *frekvenciá*nak hívjuk: $f = 1/T$, dimenziója 1/idő, mértékegysége 1/s = 1 Hz. Pl. ha a szív percenként 50-et dobban, akkor a frekvenciája $f = 50$ $(\text{perc})^{-1} = 50/60$ Hz, a periodusideje $T = 60/50$ s.

Tágabb értelemben rezgésről beszélünk akkor is, ha a fizikai mennyiségnek időbeli ismétléses jellege felismerhető. Pl. a csillapított rezgés szigorúan nem periodikus, mégis a rezgések közé soroljuk (ha a csillapítás az aperiodikus határeset (lásd később) alatti).

Felosztások. A $g(t)$ függvény konkrét matematikai alakja szerint sokféle rezgés lehet.

Harmonikus rezgés (*szinuszrezgés*): $g(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$,

ahol A az *amplitúdó*, ω a *körfrekvencia* ($\omega = 2\pi / T$), $\omega t + \alpha$ a fázis és α a kezdőfázis. (A fázist célszerű radiánokban mérni szögfokok helyett.) Az időbeli (periodikus) változást egyetlen szinuszfüggvény írja le.

Anharmonikus rezgések: a fizikai mennyiség egyidejűleg véges (lásd pl. Lissajous-görbéket) vagy végtelen sok (lásd a Fourier-tételt) harmonikus rezgést végez. Típikus példák a *relaxációs* (fűrészfog) *rezgések*. Ilyen anharmonikus, de természetesen periodikus változást mutat a mellkas térfogata a levegő lassú és erőltetett beszívása, majd hirtelen kiengedése következtében.

Harmonikus rezgő mozgás

Az m tömegű anyagi pont az x tengely mentén végzi harmonikus rezgő mozgását, úgy, hogy az egyensúlyi helyzete az origóban van.

Kinematikai leírás. A hely-idő összefüggésből indulunk ki, és ebből leszármaztathatók más kinematikai mennyiségek is.

A kitérés (helykoordináta): $x = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

A sebesség: $\mathrm{v} = \dfrac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ legnagyobb a kezdőponton való áthaladás pillanataiban (t = 0, T/2, T, ...) és zérus a fordulópontokban (t = T/4, 3T/4, ...).

A gyorsulás: $a = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot x$ a kitéréssel arányos, és ezzel ellentétes irányú, vagyis mindig a kezdőpont felé mutat.

Becsüljük meg a „120-at verő szív” 1 cm-es amplitúdójú, és harmonikusnak feltételezett rezgőmozgást végző elemének maximális gyorsulását! $a_{\max} = -\omega^2 A = (2\pi/T)^2 A = 1.58$ m/s^2, a gravitációs gyorsulás (g = 9.81 m/s^2) hatoda.

Becsüljük meg az f = 1 MHz frekvenciájú ultrahang továbbításában résztvevő, A = 10 nm amplitúdójú (a hidrogénatom sugara ~ 0,1 nm) rezgést végző szöveti elem maximális gyorsulását! $a_{\max} = -\omega^2 A = (2\pi f)^2 \cdot A = 4 \cdot 10^5$ m/s^2, a gravitációs gyorsulás (g = 9.81 m/s^2) negyvenezerszerese. A legképzettebb vadászpilóták is csak rövid ideig képesek ellenállni az egész testre ható 5-10 g gyorsulásnak. Vigyázat, kavitáció léphet fel! Ezen nem csupán elszörnyűlködni kell, hanem gyakorlatilag is védekezni kell (pl. meg kell fontolni a magzati ultrahang képek öncélú rendelgetését a családi albumba).

Dinamikai leírás. A mozgás gyorsulás-idő függvényét behelyettesítjük a dinamika alapegyenletébe (Newton II. törvényébe):

$$F = m \cdot a = -m\omega^2 \cdot x = -k \cdot x$$

Az erő egyenesen arányos a kitéréssel, és vele ellentett irányú (v.ö. a rugalmasságtan *Hooke törvényé*vel: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ahol $\sigma = F/A$ a mechanikai feszültség, E Young rugalmassági modulus és $\varepsilon = \Delta l/l$ relatív megnyúlás). Ez a harmonikus rezgő mozgás kialakulásának dinamikai feltétele. Az olyan erők, amelyek a (stabilis) egyensúlyi helyzet felé mutatnak (azaz a kitéréssel ellentétes irányúak), rezgő mozgást hoznak létre, de csak akkor keletkezik harmonikus rezgő mozgás, ha az erő nagysága egyenesen arányos a kitéréssel.
Az erő kifejezésében szereplő arányossági tényező a *direkciós (irányító) erő*:

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

dimenziója erő/távolság, mértékegysége N/m.
Innen a harmonikus rezgő mozgás *rezgésideje*:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

azaz a rezgésidő egyenesen arányos a tömeg négyzetgyökével, ha k változatlan, és fordítva arányos az irányító erő négyzetgyökével, ha m állandó.

A harmonikus rezgő mozgást végző test energiája. A mozgási ($\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2$) és a potenciális (rugalmassági, $\frac{1}{2} kx^2$) energiák az idő szerint periodikusan és egymással ellentett ütemben változnak. Mivel az erőtér konzervatív, a teljes mechanikai energia megmarad:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{állandó}\,.$$

Ha derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk a potenciális energiát a hely (elmozdulás) függvényében, akkor felfele álló szárú parabolát kapunk. A kétszer, háromszor nagyobb amplitúdóval rezgő test összes energiája (ugyanakkora frekvencia esetén) négyszer, kilencszer nagyobb, és hasonló kvadratikus összefüggés érvényes a frekvenciára is.

Harmonikus rezgő mozgás előállítása. A csavarrugó húzásra és összenyomásra is a hosszváltozás mértékével egyenesen arányos erőt fejt ki, és az erő mindig a nyújtatlan (egyensúlyi) állapot irányába mutat. Emiatt a súrlódásmentes, vízszintes lapra helyezett rugóhoz erősített test a kitérítés után magára hagyva harmonikus rezgőmozgást végez. Kis kitéréseknél a matematikai és a fizikai ingák is harmonikus rezgő mozgást végeznek.

Harmonikus rezgések összetevése. Egy pont két független hatás következtében egyszerre két rezgést is végezhet, azaz a rezgések (zavartalanul) összeadódhatnak (szuperponálódhatnak). Pl. az ujjunk hegye ilyen összetett mozgást végez, ha a karunkat függőleges síkban lengetjük, és ezzel egyidejűleg a kezünket is periodikusan mozgatjuk a csukló, mint tengely körül. Két lineáris rezgés összetevésénél elegendő egyrészt egy irányú rezgések, másrészt egymásra merőleges rezgések összetevésével foglalkoznunk, mert más esetek erre a kettőre vezethetők vissza.

1. Egy egyenesbe eső (egy irányú) rezgések összetevése.

a) A frekvenciák megegyeznek.

$$x_1 = A_1 \sin\omega t$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Az eredő rezgés az egyes rezgések algebrai összege:

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \alpha),$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\alpha_0} \;\text{ és }\; \mathrm{tg}\alpha = \frac{A_2 \sin\alpha_0}{A_1 + A_2\cos\alpha_0}.$$

Az eredő rezgés szintén ugyanolyan irányú és frekvenciájú harmonikus rezgés, mint az összetevők, és az A amplitúdó valamint az α fázisállandó az összetevő rezgések amplitúdójától és α_0 fáziskülönbségüktől függ.

Speciális esetek:

- azonos fázisú rezgéseknél (együttrezgésnél, $\alpha_0 = 0$) az amplitúdók összegződnek $A = A_1 + A_2$, és az eredő fázis az összetevő rezgések fázisával egyezik meg $\alpha = 0$. A rezgések (ill. később látjuk, a hullámok interferencia révén) erősítik egymást.
- ellentett fázisú rezgéseknél ($\alpha_0 = \pi$) az amplitúdók kivonódnak: $A = |A_1 - A_2|$, és az eredő fázisa a nagyobb amplitúdójú rezgés fázisával egyezik meg. Ha $A_1 = A_2$, akkor $A = 0$, vagyis a rezgések kioltják egymást (hasonlóan, mint ahogy az ilyen hullámok teszik, lásd később a (fény)hullámok interferencia-jelenségeit).

b) A frekvenciák különböznek, *lebegés*ek.

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_0)$$

Az eredő rezgés most nem hozható $x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \alpha)$ alakra, és ezért nem harmonikus rezgés, sőt általában nem is periodikus folyamat, csak akkor, ha a frekvenciák aránya (ω_1/ω_2) racionális szám. Ekkor $\omega_1 = n_1 \cdot \omega$ és $\omega_2 = n_2 \cdot \omega$ (n_1 és n_2 relatív prím egész számok), és az $x = A_1 \sin(n_1 \omega t) + A_2 \sin(n_2 \omega t + \alpha_0)$ függvény értéke $T = 2\pi/\omega$ időközönként ismétlődik.

Speciális eset: két közel egyenlő frekvenciájú harmonikus rezgés összetevése, a lebegés. Az egyszerűség kedvéért legyenek megegyezőek az amplitúdók és nulla a fáziskülönbség.

$$x_1 = A\sin \omega_1 t$$

$$x_2 = A\sin \omega_2 t$$

Az eredő rezgés

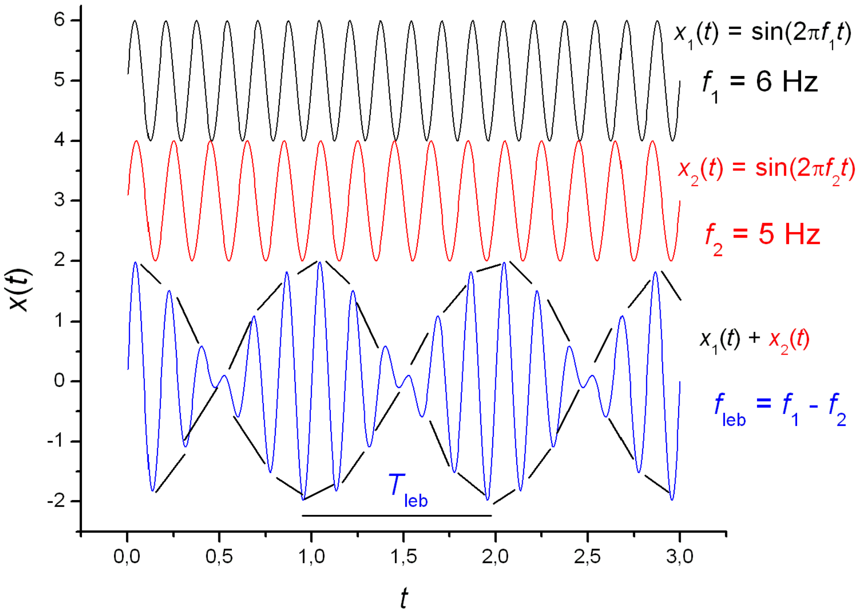
$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t .$$

Mivel $\omega_1 \approx \omega_2$, ezért a koszinusztényező sokkal lassabban változik az idővel, mint a szinusztényező. Az eredő rezgést olyan szinuszrezgésnek foghatjuk fel, amelynek körfrekvenciája $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, és amelynek amplitúdója $2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ viszonylag lassan ingadozik $2A$ és 0 között. Ez a jelenség a *lebegés* vagy *lüktetés*, az az időtartam, amely két egymás utáni amplitúdó-maximum között eltelik, a *lebegési idő,* T_{leb}. Ez az idő a $2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ függvény teljes periódusának, $\frac{2\pi \cdot 2}{\omega_1 - \omega_2}$-nek a fele: $T_{\text{leb}} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{f_1 - f_2}$.

Az $f_{\text{leb}} = 1/T_{\text{leb}}$ *lebegési frekvencia* a két rezgés frekvenciájának a különbsége:

$$f_{\text{leb}} = f_1 - f_2 .$$

A lebegés jelensége legközvetlenebbül a hallásnál (hangtanban) mutatkozik: Ha egy 440 Hz és egy 446 Hz rezgésszámú hangvillát egyszerre szólaltatunk meg, akkor másodpercenként hatszor „lüktető” hangot hallunk. (Ha a két rezgés amplitúdója nem egyenlő, akkor a lebegési minimumok kevéssé élesek.)



2. Egymásra merőleges rezgések összetevése, *Lissajous-görbék*.

a) A frekvenciák megegyeznek. A rezgés eredője általában „elliptikus rezgés” (ellipszisben poláros rezgés), vagyis az

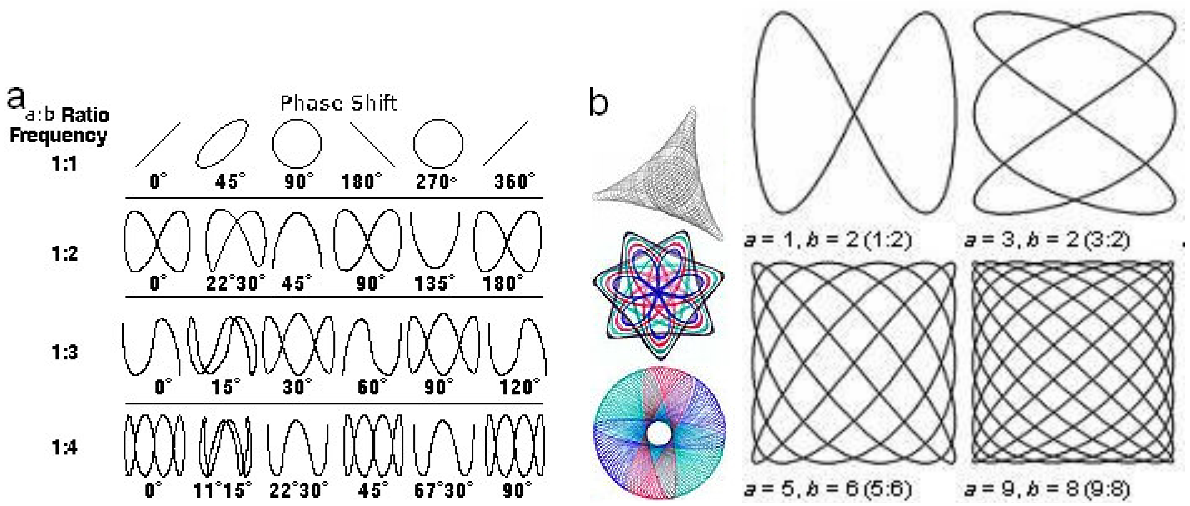
$$x = A\sin\omega t \qquad y = B\sin(\omega t + \alpha)$$

rezgéseket végző test az *xy* síkban ellipszist ír le, amelyről úgy győződhetünk meg, ha a két egyenletből a közös paramétert, a *t* időt elimináljuk. Az ellipszis méreteit és helyzetét az *A* és *B* amplitúdók és az *α* fáziskülönbség határozzák meg (lásd az ábra 1. sorát).

b) A frekvenciák különböznek. Noha a

$$x = A\sin\omega_a t \qquad y = B\sin(\omega_b t + \alpha)$$

egyenletekben mind az *x*, mind az *y* koordináta periodikusan változik az idővel, az eredő mozgás feltételesen periodikus: csak akkor periodikus, ha a két frekvencia aránya (ω_a / ω_b) racionális szám (lásd az ábrákat, ahol ω_a / ω_b = ½, 1/3, ¼, 3/2, 5/6 és 9/8 és *A* = *B*). Ellenkező esetben (pl. ha $\omega_a / \omega_b = \sqrt{2}$), a görbe nem záródik, a mozgó pont sohasem tér vissza a kezdeti helyzetébe.



Rezgések felbontása harmonikus rezgésekre, Fourier tétele. Az előző pontban láttuk, hogy az olyan harmonikus rezgések összege, amelyeknek a frekvenciái egy alapfrekvencia egész számú sokszorosai, mindig periodikus folyamatot, azaz rezgést (de nem szükségszerűen harmonikus rezgést) jelentenek. A megfordított probléma is érdekes: felbontható-e egy megadott rezgés harmonikus rezgések összegére? A gyakorlati esetekben előforduló (kellően „szabályos") periodikus függvények esetén a válasz egyértelmű igen.
Fourier-féle tétel: ha $g(t)$ az idő periodikus függvénye, azaz $g(t) = g(t+T)$, akkor egy és csakis egyféleképp szinusz- és koszinusz-függvények összegére bontható, amelyben az összetevők (felharmonikusok) amplitúdói (A_i és B_i, $i = 0,1,2,...$) különbözőek és a frekvenciái egy alapfrekvencia (ω) egész számú sokszorosai: $\omega_i = i \cdot \omega$ ($i = 1,2,...$):

$$g(t) = A_0/2 + A_1\cos\omega t + A_2\cos 2\omega t + ...+ B_1\sin\omega t + B_2\sin 2\omega t + ...$$

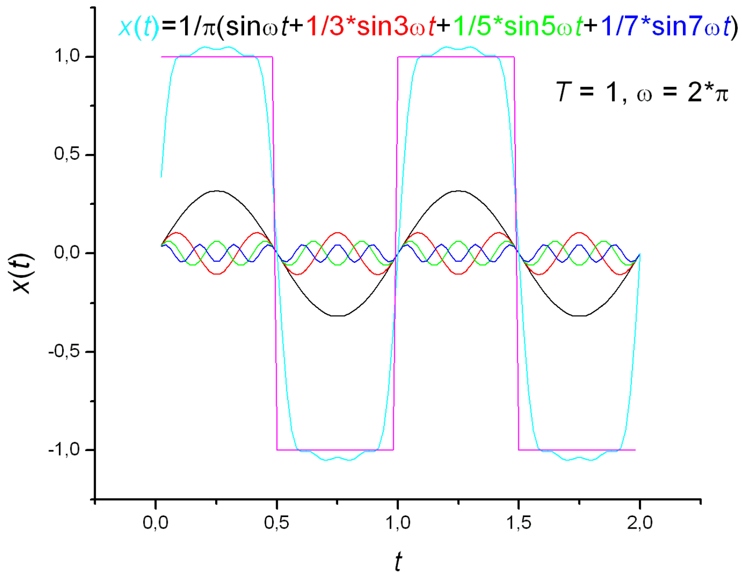
ahol az A_i és B_i együtthatókat a következő integrálok határozzák meg:

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(i\omega t)\, dt \qquad B_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(i\omega t)\, dt \qquad (i = 0,1,2,3,...)$$

Sok praktikus esetben a $g(t)$ függvényt már a Fourier-sor néhány első tagja is jól megközelíti (lásd az ábrát). Számítógépes algoritmusok és ezeken alapuló gyors programok állnak a felhasználók rendelkezésére.
<u>Példa</u>. a négyszög-rezgést az alábbi harmonikus komponensekre lehet felbontani:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + ...),$$

amelyből a négy első tag összege már igen jól közelíti az ideális négyszög jelet (az amplitúdón, valamint a fel- és lefutás sebességein látni a közelítés elfogadhatóságát).



A frekvenciák szerinti amplitúdó-eloszlást *spektrum*nak (*színkép*nek) is hívják, amely lehet *diszkrét* (periodikus függvények esetében) és *folytonos* (aperiodikus függvények esetén, amelyet Fourier-sor helyett Fourier-integrál formájában állíthatunk elő). A Fourier-transzformáció a függvényt az idősíkról a frekvenciasíkra viszi át ($t \rightarrow \omega$) át, ahol más (nem kinetikai) szempontú (spektrális) analízist tesz lehetővé (lásd az infravörös (IR) spektrumok felvételét Fourier transzformációs (FT) technikát alkalmazó, és ezzel rendkívüli érzékenységet elérő (FTIR) spektrofotométereket). Sok esetben a fordított irányú (inverz Fourier) transzformáció is érdekes lehet.

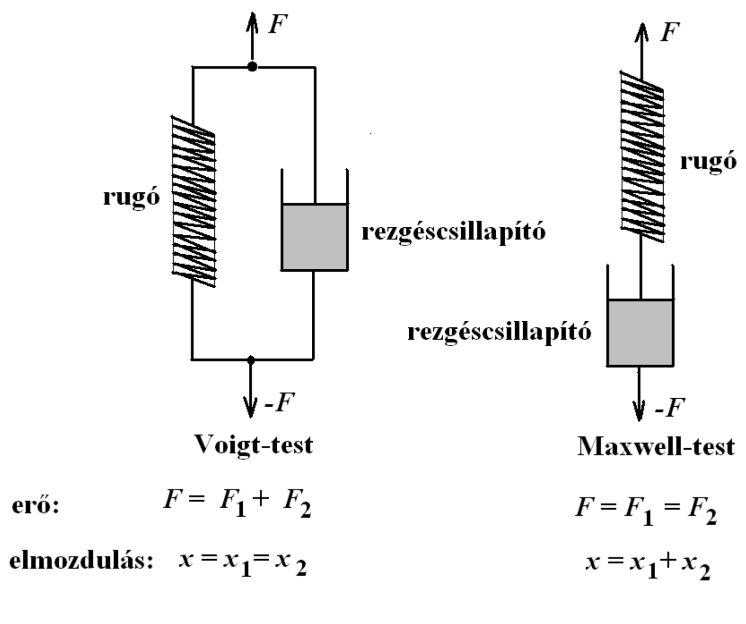
A legismertebb alkalmazás a hangrezgések felbontása (harmonikus analízis) alaphangra (frekvenciája ω, amely a hang magasságát határozza meg) és harmonikus felhangokra (frekvenciájuk $\omega_i = i\cdot\omega$ (i = 1,2,...)), amelyek viszonylagos erőssége (amplitúdója) a hang színezetét határozza meg. A száj- és orrüregben kialakuló és frekvencia-specifikusan felerősödő rezgések jól felismerhetően alakítják a hang felharmonikusait ill. színezetét. Elég, ha egyetlen fogat távolítunk el, már ez is érződik a hang színezetének megváltozásán.

Csillapított rezgő mozgás

Az élő rendszerek anyagai között ritka kivételnek számítanak azok (ha egyáltalán vannak ilyenek), amelyek a fizikai absztrakció (anyagi pont, merev test, szilárd rugalmas test, ideális folyadék stb.) különleges kategóriáiba sorolhatók. Általában egyszerre mutatnak (az ideálistól eltérő) rugalmas (elasztikus) és súrlódó folyadékra jellemző (viszkózus) tulajdonságot. Ezeket összefoglalóan *viszkoelasztikus anyag*oknak hívjuk, amelyeket ha rezgésbe hozunk, a rezgés csillapodni fog, azaz az egyensúlyi helyzeten való ismételt áthaladás után egyre kisebb és kisebb maximális kitérést (amplitúdót) fog mutatni, míg végül megszűnik a rezgő mozgás. Sőt, nagyobb csillapításnál az is előfordulhat, hogy a kitérített test nem oszcilálva, hanem kitérését monoton csökkentve közelít az egyensúlyi helyzethez anélkül, hogy azon áthaladna (aperiodikus eset). A legegyszerűbb közelítésben az ilyen mozgásokat leíró mechanikai modellt két alkotóelemből építhetjük fel.

Lineáris rugó: benne az x elmozdulással arányos, és ellentett irányú erő ébred: $F = -kx$, amellyel a rugalmasság ideális (lineáris) Hooke-törvényét adja vissza.

Rezgéscsillapító (*lengésfék*): a sebességgel arányos, és vele ellentétes irányú (súrlódási, fékező) erő keletkezik: $F = -\eta v$, ahol η a csillapító (általában folyadék anyagának) viszkozitása. A rezgéscsillapító ilyen alakjában lényegében a súrlódó folyadékok newtoni alapösszefüggését teljesíti. (A legegyszerűbb megvalósítás szerint egy viszkózus anyaggal töltött hengerben szorosan illeszkedő dugattyú mozog.) Ilyen rezgéscsillapítókkal vannak felszerelve az autók vagy a repülőgépek. Ez utóbbiaknál a síma leszálláshoz különösen fontos földreérkezéskor a nagyon erős rezgések és lökések hatékony csillapítása.



A két egyszerű elem kombinációiból igen változatos mechanikai modelleket lehet felépíteni, amelyekkel a reális anyagok (szabad és kényszerített) rezgéseit és viszkoelasztikus tulajdonságait szokás közelíteni (lásd a bevezető ábrát az emberi test „karácsonyfa”-modelljéről). Érzékeltetésül, itt csupán egyetlen és egyben a legegyszerűbb modellt vázoljuk fel, amelyben a két elemet párhuzamosan kötjük (*Voigt-modell*). A két, párhuzamos ágban az elmozdulások megegyeznek (x), de bennük különböző erők ébrednek: $F_1 = -kx$ a rugó és $F_2 = -\eta v$ a csillapító ágában. Az m tömegű rezgő testre a két erő összege hat: $F = F_1 + F_2$, így a mozgásegyenlet (Newton II. törvénye): $m \cdot a = -kx - \eta v$, amely a gyorsulásnak $a = d^2x/dt^2$ és a sebességnek $v = dx/dt$ az elmozdulással való kinematikai kifejezéseit beírva az

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - \eta \cdot \frac{dx}{dt}$$

differenciálegyenlethez vezet. Ennek megoldása analitikus formában megadható, amely attól függ, hogy a fékező (súrlódási) erő egy bizonyos értéknél kisebb (periodikus eset) vagy nagyobb (aperiodikus eset).

Periodikus mozgás: $\left(\frac{\eta}{2m} =\right)\kappa < \omega_0\left(= \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$. Ebben az esetben a rezgés harmonikusnak tekinthető, amelynek amplitúdója az idővel exponenciálisan csökken:

$$x = A \cdot e^{-\kappa t} \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

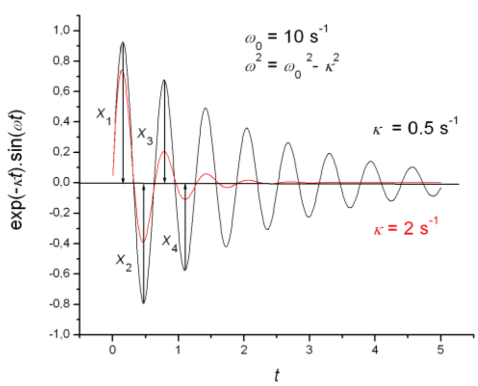
és a rezgés körfrekvenciája

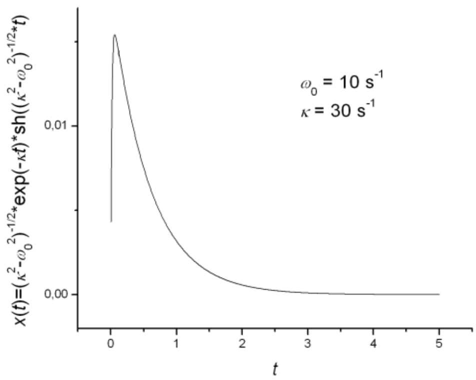
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2},$$

ahol ω_0 a csillapítatlan ($\kappa = 0$) rezgés körfrekvenciája. Mind az amplitúdó lecsengésének sebessége, mind a körfrekvencia a csillapítás (κ) mértékétől függ. Minél nagyobb a csillapítás (súrlódás), annál inkább csillapított a rezgés, és annál kisebb a körfrekvencia. Bármely két egymásutáni, egyirányú maximális kitérés viszonya ugyanaz, ezért ezt a hányadost a csillapodás mértékéül vezethetjük be:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{\kappa T},$$

ahol $T = 2\pi/\omega$.





Aperiodikus mozgás: $\kappa > \omega_0$, vagyis a súrlódás egy bizonyos értéknél nagyobb. Az $x(t=0)=0$ és $v(t=0)=v_0$ kezdőfeltételekhez tartozó analitikai megoldás

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} e^{-\kappa t} \mathrm{sh}\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\, t\right),$$

amely szerint az x kitérés mindig egyirányú (nincs átmenet az egyensúlyi helyzeten), és $t \to \infty$ esetén zérushoz (azaz az egyensúlyi helyzethez) tart. Így mozog pl. egy nagy súrlódású folyadékban (mézben) kitérített inga vagy a nagy viszkozitású izületi folyadékban hirtelen kitérített, majd magára hagyott ízület.

Kényszerrezgések. Rezonancia

Ha a rezgésre képes rendszer egyetlen lökéssel rezgésbe hozzuk, és ezután magára hagyjuk, akkor a rendszer (csillapított vagy csillapítatlan) *szabad rezgést* végez a belső erők (rugó, lengésfék) hatására..

Ha a rendszerre tartósan egy külső, periodikusan változó („gerjesztő") erő is hat, akkor az *kényszerrezgés*t fog végezni. A hozzá tartozó mozgásegyenlet a csillapított rezgésnél megismert egyenletben kiegészül a periodikus gerjesztést kifejező erővel:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - \eta \cdot \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t \,,$$

amelynek általános megoldása $\kappa < \omega_0$ (kis csillapítás) esetében

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi) + ae^{-\kappa t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \cdot t + \alpha\right),$$

ahol

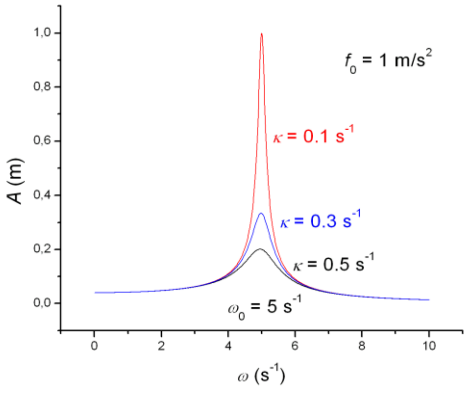
$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

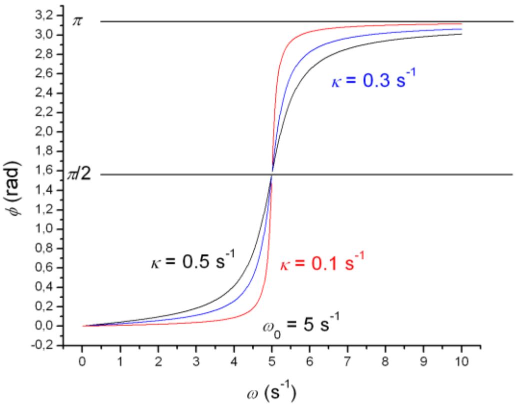
és a és α a kezdőfeltételekből meghatározható integrációs állandók.

A rendszer követi a gerjesztést (első tag) ugyanakkor megtartja sajátrezgését (második tag) is. Így mozgása egy ω körfrekvenciájú szinuszrezgésből és a csillapodó sajátrezgésből tevődik össze. Az utóbbi azonban bizonyos idő után, a *berezgési folyamat* után „elhal", tartósan csak a gerjesztés által kiváltott $A{\cdot}\sin(\omega t - \varphi)$ szinuszrezgés, mint kényszerrezgés marad meg. Ennek a rezgésnek A amplitúdója, valamint a gerjesztő erő és a kényszerrezgés közt fellépő φ fáziskülönbség a gerjesztő erő ω körfrekvenciájától függ.

Az A amplitúdó a kis frekvenciáktól kiindulva fokozatosan emelkedik, $\omega = \omega_0$ értéknél maximumot ér el, majd növekedő frekvenciával újra csökken. Az amplitúdó akkor a legnagyobb, amikor a gerjesztő erő frekvenciája a rendszer sajátfrekvenciájával esik egybe. Ez a jelenség a *rezonancia*, az $A = A(\omega)$ görbe a *rezonanciagörbe*. A rezonancia annál élesebb, minél kisebb a rendszer csillapítása (κ). Csillapítatlan rendszernél a rezonanciahelyen az amplitúdó végtelen nagy lenne; ez az ún. *rezonancia-katasztrófa*.

Amint az ω 0-tól ω_0-ig, majd innen végtelenig nő, a φ fáziskülönbség 0-tól $\pi/2$-ig, majd innen π-ig növekszik., vagyis a kényszerrezgés fázisban mindig elmarad a gerjesztő erőhöz képest. Rezonancia esetén a fáziskésés $\pi/2$, vagyis az $F_0\sin \omega t$ gerjesztő erő ekkor egyirányú lesz a rezgő test $v = v_0\cos \omega t$ sebességével, tehát a testet mindig (optimálisan) gyorsítja, ezzel állandóan (nem csupán szakaszosan) energiát közöl vele. A rezonancia során a kitérés maximális mértéke attól függ, hogy a gerjesztő erő által közölt energia (teljesítmény) hogyan aránylik a csillapodó rezgéssel együttjáró energia- (teljesítmény-)veszteséghez.





Ajánlott olvasnivalók

Budó Á.: Kísérleti Fizika, Tankönyvkiadó, Budapest 1965.
Holics L.: Fizika, 1. kötet Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
Fercher A.F.: Medizinische Physik, Springer, Wien, New York 1999.
Maróti P.: Biomechanika. VII. fejezet a „PhD kurzusok fizikából” (szerk.: Hevesi Imre), JGYTK kiadó, Szeged (nyomdában).
Maróti P. és Laczkó G.: Bevezetés a biofizikába, JATEPress Szeged (több kiadás).
Maróti P. és Tandori J.: Biofizikai feladatok, JATEPress, Szeged 1996.
Maróti P., Berkes I. és Tölgyesi F.: Biophysics Problems. A textbook with answers, Akadémiai Kiadó, Budapest 1998.

Feladatok házi és/vagy szemináriumi feldolgozásra.

1) A 100 kg tömegű bedobó kosárlabdázó felugrásnál a tömegközéppontját 1 m magasra emeli, a talajra való visszaérkezésekor a sebességét 10 cm (rugalmas landolás) ill. 1 cm (tehetetlen, „krumplis-zsák”-szerű esés) hosszú úton fékezi le. Mekkora átlagos erő ébred testének tartószerkezetében?
2) A középfül csontjainak (kalapács-üllő-kengyel) szerepét egy olyan modell-lel közelítjük, amelyben az m = 2 μg tömegű csontocskákat egy k_1 = 72 N/m és egy k_2 = 7,2 N/m direkciós erejű rugóval a dobhártyához ill. az ovális ablakhoz erősítjük. Mekkora lesz a frekvenciája ennek a rendszernek?
3) Egy gépkocsi tömege terheletlenül 800 kg. 5 személy (500 kg) beülésével a karosszéria 6 cm-t süllyed. Mennyi az autó rezgésideje üresen és utasokkal megterhelve?
4) Egy vízen úszó fahasábot egy kissé lenyomjuk, majd magára hagyjuk. Határozzuk meg a fel-le mozgó fadarab rezgésidejét!
5) A járást a Weber testvérek (1836) a nem terhelt láb fizikai ingaként való viselkedéseként fogták fel, azaz ezen láb izomzatának teljes passzivitását tételezték fel a hátulról előre való lendítés során („lógó láb” koncepciója). Mekkora az s = 0,8 m lépéshossz esetén a járás sebessége, ha az l = 1 m hosszúságú szabad lábat a csípő mint tengely körül mozgó fizikai ingának tekintjük?
6) Demonstráljuk számítógépes grafikai eljárásokkal a rezgések összetevésének fentebb tárgyalt elemi szabályait! Konstruáljunk egyszerűbb Lissajous-görbéket!
7) Az egységnyi magasságú „háromszög-rezgés” Fourier-sora

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2}(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \frac{1}{7^2}\sin 7\omega t + ...)\,.$$

Érzékeltessük ezt számítógépes grafikai eljárással (ami messze nem matematikai erejű bizonyíték, csak „vizuális inspekció”).
8) Írja fel a sorosan kapcsolt rugóra és csillapítóra erősített test mozgásegyenletét (Maxwell-modell)!
9) A belvárosi hídra egy szúnyog száll, és a lábával a rezonanciafrekvencián ütögeti a hidat. A tapasztalat szerint a híd nem fog leszakadni, rezonancia-katasztrófa nem következik be. Miért?
10) A négykerekű vasúti kocsik rugói a síncsatlakozásoknál kapott lökések következtében rezgésbe jönnek. A rugók 1 N erő hatására 1,6 μm-t nyomódnak össze, a kocsi tömege 22 tonna, a síndarabok hossza 18 m. Milyen menetsebesség esetén legnagyobb a rugók kirezgése (a kocsi „zötykölődése”)?