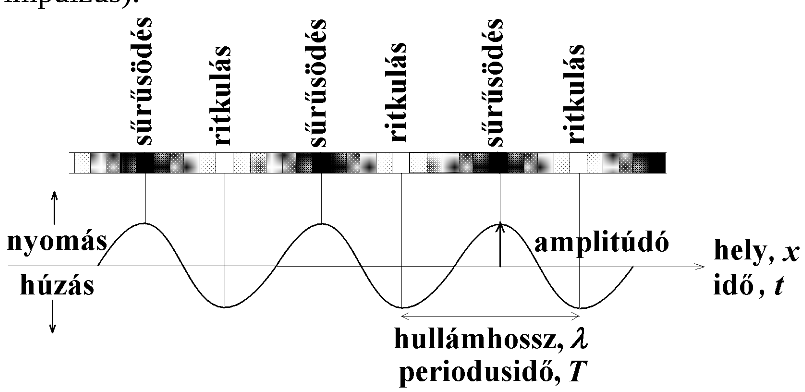
Mechanikai hullámok, hangtan, ultrahangok

A rugalmas közegben rezgő test mozgásállapota (energiája) TÉR-ben és IDŐ-ben tovaterjed. Ezt a jelenséget *mechanikai hullám*nak nevezzük. Általában haladó hullámról beszélünk akkor, ha egy közegben valamilyen zavar tovaterjed 1) egyenes mentén (egydimenziós hullám), 2) felület mentén (felületi hullám, pl. vízhullám) vagy 3) térben (térbeli hullám, pl. hang- fény- és elektromágneses hullámok).

Hullámterjedés egyenes mentén; transzverzális és longitudinális hullámok. A hullámokat feloszthatjuk aszerint, hogy a rugalmas közeg részecskéi milyen irányú mozgást végeznek a hullám terjedési irányához képest. *Transzverzális*nak nevezzük azokat a hullámokat, amelyeknél a közeg részecskéi a deformáció során a terjedés irányára merőlegesen, *longitudinális*nak pedig azokat, amelyeknél a terjedési iránnyal párhuzamosan térnek ki. A hullám pillanatképei (fényképfelvételei, amikor t állandó) szerint transzverzális hullámokban hullámhegyek és hullámvölgyek, míg longitudinális hullámoknál sűrűsödések és ritkulások (összehúzódások és megnyúlások) terjednek tova. A hullámot közvetítő közeg részecskéi egyensúlyi helyzetük körül rezegnek, azaz az átlagos elmozdulásuk zérus. A hullámban általában nem a részecskék terjednek tova, hanem a rezgésállapot (fázis, rezgési energia és impulzus).



Mivel szilárd testekben nyíróerők felléphetnek, ezért itt mind transzverzális, mind longitudinális hullámok kialakulhatnak. Folyadékokban és gázokban azonban számottevő nyíróerők nincsenek (sőt, a transzverzális kitérést a belső súrlódás még csillapítja is), ezért ezekben a közegekben csak longitudinális hullámok léphetnek fel.

Egyenes mentén terjedő harmonikus hullám egyenlete. A harmonikus rezgő mozgást végző hullámforrás kitérés-idő függvénye

$$y(x=0,t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,.$$

Ez adja meg a hullámforrás kitérését egy tetszőleges t időpontban. A hullámforrástól x távolságra levő részecskéhez ez a rezgési állapot még nem ért el, ott a rezgésnek egy korábbi, a $(t - x/c)$ időpillanathoz tartozó állapota található (c a *hullám terjedési sebessége*), amikor a hullámforrás kitérése $A\sin\big(\omega(t - x/c) + \varphi\big)$ volt. Így a hullámforrástól x távolságra levő részecske kitérése a t. időpillanatban

$$y(x,t) = A\sin\big(\omega(t - x/c) + \varphi\big)\,.$$

Csillapítatlan harmonikus (szinuszos) hullám esetén a közeg egy részecskéjének rezgési állapotát a szinuszfüggvény argumentuma, a *fázisszög* $\big(\omega(t - x/c) + \varphi\big)$ határozza meg.
Az azonos fázisú kitérések legkisebb távolságát *hullámhossz*nak (λ) hívjuk, amely a terjedési sebességgel (c), a periodusidővel (T), a lineáris frekvenciával (f) és a körfrekvenciával (ω) az alábbi módokon fejezhető ki:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} = 2\pi\frac{c}{\omega}\,.$$

A hullámhosszat bevezetve a hullám

$$y(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \varphi / 2\pi\right)$$

alakban írható fel, amelyből jól látszik, hogy a hullám térben és időben periodikusan terjed tova, az időbeli periodicitás kifejezője a rezgésidő (T), míg a térbeli periodicitást a hullámhossz (λ) jellemzi. Hasonló értelmű mennyiség-pár a körfrekvencia, a 2π másodperc alatti rezgések száma: $\omega = 2\pi/T$ és a *hullámszám*, az 2π cm hosszú útszakaszra eső hullámok száma: $\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

A hang visszaverődése és törése. Ha a hullám terjedési sebessége két közegben különböző, akkor a két közeg határára érkező hullám egy része visszaverődik (reflexió, R), másik része irányváltozással halad tovább (átmenő hullám, $T = 1 - R$). Mivel a két közegben a hullámok frekvenciája megegyezik: $f_1 = f_2$, ezért a két közegben mért terjedési sebességek aránya a hullámhosszak arányával egyezik meg: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Egydimenziós hullám. A visszaverődés jelenségét úgy tanulmányozhatjuk, hogy egy kötélhez egy másik, az előzőtől eltérő tulajdonságú kötelet erősítünk, és rajtuk hullámot futtatunk végig. A két kötél találkozási pontjáról a hullám részben visszaverődik, részben tovahalad. Rögzített végről (pl. ha a kötelet falhoz rögzítjük) a hullám ellentett fázissal (hullámhegy hullámvölgyként) verődik vissza. Rögzítetlen, szabad végről a hullám egyező fázissal (hullámhegy hullámhegyként) verődik vissza.

Ha az oda- és visszamenő hullámok találkoznak (*interferencia*), akkor *állóhullám*ok alakulhatnak ki, amelyeket *csomópont*ok (rezgési minimumok) és *duzzadóhely*ek (rezgési maximumok) jellemeznek. A hullám nem fut tova a kötélen, hanem a pontok egy helyben rezegnek. A hangszerekben vagy a külső fülben kialakuló állóhullámoknak a hangszín (a Fourier-komponensek amplitúdóarányainak) kialakításában döntő szerepük van.

Két-, ill. háromdimenziós hullámok visszaverődésénél és törésénél a beeső hullámnyaláb, a beesési merőleges, a visszavert és megtört hullámnyaláb egy síkban vannak. A beesési szög és a visszaverődési szög egyenlő. A törési (Snellius-Descartes) törvény szerint a beesési szög (α) és a törési szög (β) szinuszainak aránya a két közegben mért terjedési sebesség hányadosa:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = \text{állandó},$$

ahol n_{21} a 2. közegnek az 1. közegre vonatkoztatott *törésmutató*ja. Az olyan közeget, amelyben a mechanikai hullámok terjedési sebessége nagyobb, akusztikailag ritkább, amelyben kisebb, akusztikailag sűrűbb közegnek nevezzük (nem keverendő össze a közeg mechanikai sűrűségével!). Ha a hullám kisebb akusztikai sűrűségű közegből érkezik nagyobb sűrűségűbe, akkor a törésmutató 1-nél nagyobb, ha sűrűbből megy ritkábba, akkor 1-nél kisebb. A teljes visszaverődés határszöge ($\beta = 90^o$): $\sin \alpha_{határ} = c_1/c_2$. Az ennél nagyobb szögekre a törés törvénye értelmetlenné válik. A tapasztalat szerint a beesési szöget 0-ról folyamatosan növelve a visszavert hullám intenzitása nő, a megtört nyalábé csökken. A határszöget elérő és azt meghaladó beesési szögeknél a megtört nyaláb eltűnik, csak a visszavert nyaláb lesz, amelynek intenzitása

<table>
<tr><th></th><th>levegő</th><th>víz</th><th>bőr</th></tr>
<tr><td>c (m/s)</td><td>345</td><td>1480</td><td>1950</td></tr>
<tr><td>akusztikai sűrűség</td><td>nagy</td><td>kicsi</td><td>nagyon kicsi</td></tr>
<tr><td rowspan="2">határszög, $\alpha_{határ}$ (fok)</td><td colspan="2">13,5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">49,4</td></tr>
</table>

megegyezik a beeső nyalábéval. Ez a *teljes visszaverődés* jelensége, amely az echográfusokat könnyen megtréfálhatja, ha nem kellő körültekintéssel járnak el (a hullám egyszerűen „nem hatol be” a vizsgálandó közegbe).
<u>Speciális eset</u>: a merőlegesen beeső hullám energiájának visszavert hányada

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 ,$$

míg a törés nélkül tovahaladó (megtört) nyalábé 1 - R. Itt $Z = \rho \cdot c$ a közeg *akusztikus ellenállása* (impedanciája). Visszaverődés csak különböző akusztikus impedanciájú közegek határfelületén jön létre: $R \neq 0$, ha $Z_1 \neq Z_2$.

Példa: ultrahang irányul levegőből ($Z = 0{,}43 \cdot 10^3$ kg·m^{-2}·s^{-1}) merőlegesen lágy szöveti részek ($Z = 1{,}6 \cdot 10^6$ kg·m^{-2}·s^{-1}) felé. A visszaverődési hányad $R = 0{,}9994$, azaz a transzmisszió csak $T = 0{,}06\%$. Ha ellenben vízbázisú cellulóz-zselét, mint *akusztikus csatolóanyag*ot ($Z = 1{,}5 \cdot 10^6$ kg·m^{-2}·s^{-1}) alkalmazunk a transducer és a lágyszöveti rész között, akkor a visszaverődési hányad $R = 0{,}001$ lesz, azaz $T = 0{,}999$ hatol be. Több, mint 3 nagyságrend a veszteség, ha nem használunk alkalmas akusztikus csatolóközeget.

A harmonikus mechanikai hullámok energiája. A hullám energiája a közeg azon tartományának mozgási és rugalmassági energiája, amelyben a hullám tartozkodik. A közegnek ω körfrekvenciával és A amplitúdóval harmonikus rezgőmozgást végző $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ tömegű és ΔV térfogatú elemének (ρ a közeg sűrűsége) teljes energiája $E_{\text{teljes}} = ½\, \Delta m\, A^2 \omega^2$. Láttuk korábban, hogy harmonikus rezgő mozgásnál a teljes mechanikai energia időben állandó. A hullámmozgásnál a közegben fekvő térfogatelem mechanikai energiája azonban változik! Ellenben belátható, hogy a teljes energia időbeli átlagértéke mégis ugyanekkora: $E_{\text{teljes}} = E_{\text{időátlag}}$. Ezzel a harmonikus hullám *energiasűrűségé*nek időbeli átlaga:

$$\overline{w} = \frac{E_{\text{idoátlag}}}{\Delta V} = \frac{1/2 \cdot \Delta m A^2 \omega^2}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 .$$

A hullám térfogategységre eső energiájának időátlaga a közeg sűrűségével, valamint az amplitúdó és a körfrekvencia négyzeteivel egyenesen arányos.

Sugárzási teljesítmény. Ha kiterjedt közegben a $\overline{w}$ energiasűrűségű síkhullám q nagyságú felületen merőlegesen halad át a $t = 0$ időpillanatban, akkor 1 s múlva a hullámfront a felülettől c távolságra lesz. Eközben $q \cdot c$ térfogatú hasábot tölt meg térfogategységenként átlagosan $\overline{w}$ energiával. A sugárzási teljesítmény a hullám terjedési irányára merőleges q nagyságú felületen

$$P = \overline{w} q c .$$

Nem síkhullámoknál a felületet olyan kicsiny darabokra osztjuk, hogy a hullámfront közelítőleg sík legyen. Az ezeken a felületeken mért sugárzási teljesítmények összege a teljes felületre vonatkoztatott sugárzási teljesítmény.

Intenzitás (*teljesítménysűrűség*). Egy hullám intenzitása a hullám terjedési irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramlott energia (különböző, egymással ekvivalens alakban kifejezve):

$$I = \frac{P}{q} = \overline{w}\, c = \frac{1}{2} \rho\, c\, A^2\, \omega^2 = \frac{1}{2} \rho\, c\, \mathrm{v}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho\, c} ,$$

mértékegysége W/m^2.

Példa. A 100 mW/cm^2 intenzitású és 3 MHz frekvenciájú ultrahangot közvetítő vízben (sűrűség 10^3 kg/m^3, terjedési sebesség 1480 m/s) az amplitúdó $A = 2$ nm, a sebesség maximuma $\mathrm{v}_{\max} = 3{,}7$ cm/s, a gyorsulás maximuma $a_{\max} = 7 \cdot 10^4$ g (!) és a nyomás maximuma $p_{\max} = 0{,}5$ bar.

Az intenzitás távolságfüggése. Pontszerű hullámforrás esetén homogén és izotróp közegben a hullámfrontok a forrással koncentrikus gömbök. A hullámforrás által időegység alatt kisugárzott energia, P, egyenlő a $q = 4\pi r^2$ nagyságú gömbfelületen időegység alatt átáramlott energiával. Az intenzitás

$$I = \frac{P}{q} = \frac{P}{4\pi\, r^2},$$

azaz a távolság négyzetével fordított arányban csökken.

Kiterjedt, D átmérőjű köralakú, f frekvencián sugárzó ultrahangforrás (transducer) intenzitás- és irányeloszlása sokkal bonyolultabb mintázatot követ. A hangteret közeli és távoli zónákra oszthatjuk, a határfelület a transducertől N távolságra van (gyakran fókusztávolságnak is hívják):

$$N = f{\cdot}D^2/(4c).$$

A közeli zónában a sugárzás nyalábosított, jó közelítéssel párhuzamos, míg a távoli zónában széttartó, divergens. A hullámnak a D átmérőjű résen való áthaladásakor megfigyelhető elhajlásából (a részleteket lásd később az optikával foglalkozó előadásban) határozhatjuk meg a széttartás mértékét megadó α szöget:

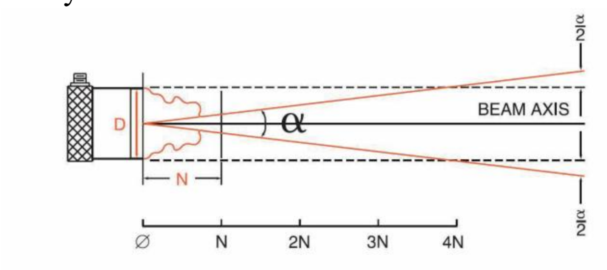
$$\sin \alpha = 1{,}22{\cdot}c/(f{\cdot}D).$$

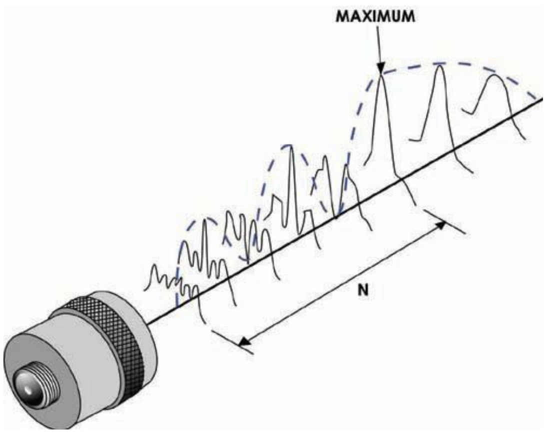
f (MHz)	N (cm)	α (fok)
1	1,6	12,3
2	3,2	6,1
5	7,9	2,5

Példa. Lágy szövetben a hang terjedési sebessége c = 1580 m/s, és legyen a transducer átmérője D = 1 cm! Az összetartozó értékpárokat a mellékelt táblázat tartalmazza.

Az orvosi dignosztika szempontjából legkedvezőbb a közeli zónában való vizsgálat a kis divergencia (nyalábosíthatóság) miatt. A távoli zónában megjelenő *oldallebeny*ek miatt azámos műtermék (artifaktum) keletkezhet.

A sugárzás tengelye mentén az intenzitás összetett módon változik. A közeli zónában sűrűn váltakozó minimumok és maximumok lépnek fel, amely ingadozás megszűnik a közeli zónából való kilépéssel, és az intenzitás a távolsággal monoton csökken. A tengelyre merőleges irányokban az intenzitás változása a közeli zónában még bonyolultabb mintázatú., amelyről az ábra betekintést ad.





A divergenciát *fókuszálással* lehet csökkenteni. Erre akusztikus vagy elektronikus megoldások állnak rendelkezése. Akusztikus lencsével a széttartó hangnyalábot össze lehet gyűjteni (hasonlóan mint ahogy a fénysugarakat összegyűjti a domború optikai lencse). Elektronikus úton a transducer (mint piezoelektromos-kristályok sorozata, *array*) elemeit egymáshoz képest időben annyira eltolva lehet indítani (ez a fázisvezérlés), hogy az általuk kisugárzott elemi hullámok eredőjének hullámfrontja (lásd az optikában tárgyalt *Huygens-Fresnel-elv*et) összetartóvá válik.

Objektív hangintenzitás. Néhány hangforrás hangteljesítménye:

Hangforrás	P (W)
normális beszéd	10^{-5}
kiáltás	10^{-3}
zongora (maximum)	0,1
autókürt	5
nagy hangszóró	10^{2}
légoltalmi sziréna	10^{3}

A gyakorlatban előforduló nagyon különböző értékekre tekintettel két teljesítményt (P_1 és P_2) vagy két intenzitást (I_1 és I_2) gyakran úgy hasonlítunk össze, hogy a P_2/P_1 hányados 10-es alapú logaritmusát (lg) képezzük, és azt mondjuk, hogy a P_2 és P_1-nek megfelelő két teljesítményszint (ill. két intenzitásszint) közötti különbség

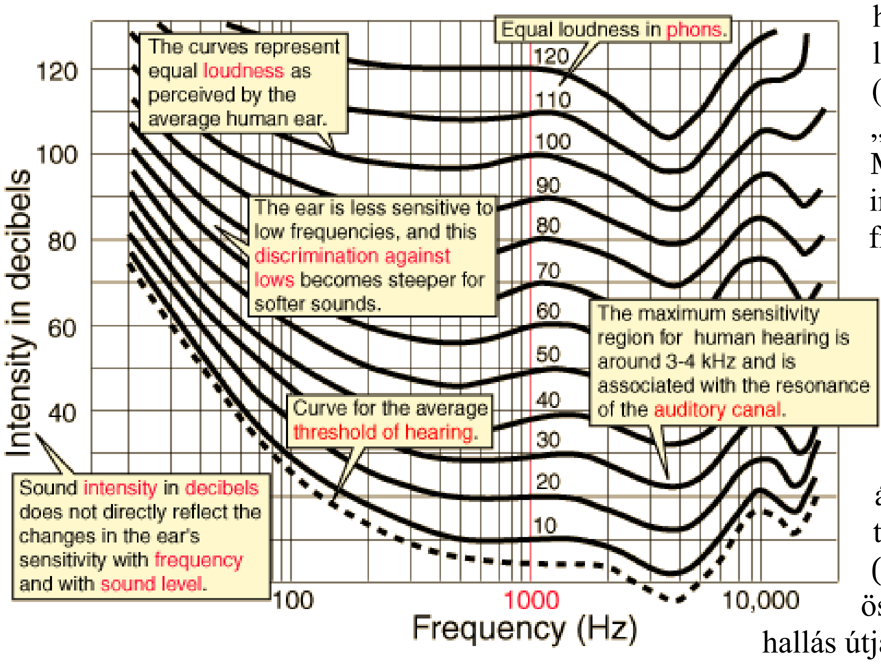
$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \quad \textit{decibel}\ \text{(dB)}.$$

Eszerint pl. egy nagy hangszóró teljesítményszintje 50 dB-lel (5 nagyságrenddel) magasabb (nagyobb), mint a kiáltásé.

Szubjektív hangerősség, hangosság.

Hangforrás	Szubjektív hangerősség (*fón*)
hallásküszöb	0
halk falevélsusogás	10
suttogás	20
csendes utca zaja	30
normális beszélgetés	50
kiabálás	80
oroszlánüvöltés közelről	120
fájdalomküszöb	130

Az objektív (fizikai eszközökkel, pl. mikrofonnal mérhető) hangintenzitástól megkülönböztetendő a szubjektív (a fülünkkel hallott, érzékelt) hangerősség. Az előbbi az inger, az utóbbi az érzet erősségének felel meg. A szubjektív hangerősség nem arányos a hangintenzitással: 10-szer, 100-szor nagyobb intenzitású hangot nem 10-szer, 100-szor erősebbnek érezzük, hanem csak kétszer, háromszor erősebbnek. A *Weber-Fechner-féle pszichofizikai törvény* szerint az érzet (hangosság) az inger (objektív hangintenzitás) logaritmusával arányos (az érzékszerveink „összenyomják" a skálát). Mivel a fül egyező intenzitású, de eltérő frekvenciájú hangokat eltérő hangosságúnak érzékel, ezért egy tetszőleges frekvenciájú hangnál a hangosságot a következőképpen állapítjuk meg: Ha a tetszőleges frekvenciájú (vagy frekvencia-összetételű) hang erőssége hallás útján megítélve annyi, mint az I intenzitású 1000 Hz-es hang, akkor



$$H = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad \textit{phon}(\textit{fón}).$$

Itt referenciának az 1000 Hz-es tiszta hangnál megfigyelhető ingerküszöböt választották 1936-ban: $I_0 = 1\cdot10^{-12}$ W/m^2, amelynél a hang hangossága 0 *fón* (hallásküszöb). A fájdalomérzetet keltő hang erőssége 130 *fón* (fájdalomküszöb). A hangosság *fón* skálája nem más, mint az 1 kHz-es hang *decibel* skálája:

$$H\,(fón) = H_{1\,\mathrm{kHz}}\,(dB).$$

A terjedési sebesség függése a közeg tulajdonságaitól.
A minden irányban igen nagy kiterjedésű, homogén és izotróp rugalmas szilárd testben mind longitudinális, mind transzverzális hullámok terjedhetnek

$$c_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \qquad c_{\mathrm{trans}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1}{2(1+\mu)}}$$

sebességgel. Itt E a (Hooke-törvényben szereplő) rugalmassági (Young) modulusz, ρ a sűrűség és μ a megnyúlással ($\Delta l/l$) együttjárú harántösszehúzódás ($\Delta d/d$) mértékét kifejező ún. *Poisson-szám*: $\mu = -\dfrac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$, amely 0 és ½ közé esik, típikus értéke 0,3 és 0,4 közötti. A longitudinális és transzverzális hullámok sebességeinek aránya csak a Poisson-számtól függ:

$$\frac{c_{\mathrm{long}}}{c_{\mathrm{trans}}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}.$$

Mivel sok anyagra $\mu \approx 1/3$, ezért $c_{\mathrm{long}} \approx 2\cdot c_{\mathrm{trans}}$. Általánosan, mivel $\mu \leq ½$, ezért ugyanabban a szilárd közegben a longitudinális hullámok sebessége nagyobb, mint a transzverzálisoké. Földrengéshullámoknál a kétféle hullám megérkezésének időkülönbségéből meg lehet becsülni a földrengés epicentrumának az észlelés helyétől való távolságát.
<u>Speciális eset</u>: a csak egy irányban végtelen nagy kiterjedésű közegben (végtelen hosszú rugalmas rúdban) nem terjedhet transzverzális hullám (nincs „hova" terjednie), és mivel nincs harántösszehúzódás (csak véges hosszúságúban lenne), ezért a longitudinális hullám terjedési sebessége egyszerűsödik (úgy vehetjük, mintha $\mu = 0$ lenne):

$$c_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Folyadékokban

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

ahol K a folyadék kompressziómodulusa: $K = -\dfrac{p}{\Delta V/V}$, azaz a nyomás ($p$) és az általa létrehozott relatív térfogatváltozás ($\Delta V/V$) hányadosa.
Gázokban

$$c = \sqrt{\frac{\kappa\cdot p}{\rho}} \qquad \text{ideális gáznál} \qquad c = \sqrt{\kappa\cdot RT},$$

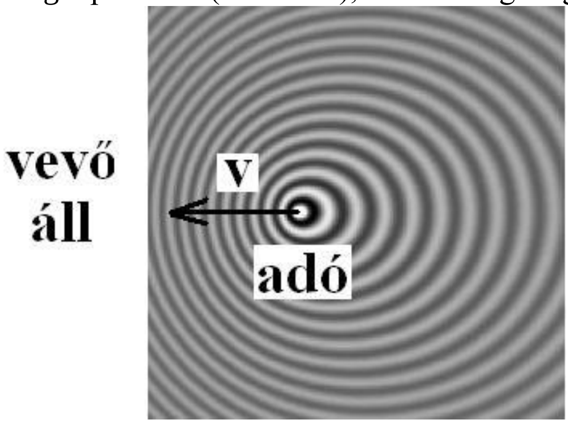
ahol $\kappa = c_p/c_V$ a gáz kétféle (állandó nyomáson és állandó térfogaton mért) fajhőjének hányadosa, R az univerzális gázállandó és T az abszolút hőmérséklet (*Laplace-féle formula*, 1816). Összehasonlítva, E (szilárd testekben) formálisan K-val (folyadékokban) ill. $\kappa\cdot p$-vel (gázokban) helyettesítendő a longitudinális hullámok terjedési sebességeinek kifejezésében.

A Doppler-effektus. A hullámforrás és a megfigyelő relatív mozgása az észlelt frekvenciát befolyásolja. Minden hullámfajtánál (fényhullámnál, hanghullámnál, stb.) fellép, de az akusztikában figyelhető meg a leggyakrabban. Egyszerűsítésként feltesszük, hogy a hangforrás és a megfigyelő úgy mozognak, hogy mindig ugyanazon az egyenesen maradnak. Minden sebességet a nyugvónak tekintett közegre vonatkoztatunk.

a) A hullámforrás nyugszik, és a megfigyelő mozog. Ha a megfigyelő v_m sebességgel közeledik az álló hangforrás felé, akkor nem csupán a hangforrás által 1 s alatt kibocsátott f_0 rezgésnek megfelelő hullámot fogja fel, hanem ezenkívül még annyi rezgést is, amennyi az 1 s alatti közeledés útszakaszára (azaz v_m-re) esik a $\lambda_0 = c/f_0$ hosszúságú hullámokból, azaz $v_m/\lambda_0 = f_0 \cdot v_m/c$ számút. Ennélfogva a közeledő (+), ill. távolodó (–) megfigyelő által észlelt frekvencia

$$f = f_0\left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right).$$

Például $v_m = \frac{1}{2} c$ sebességű közeledésnél (távolodásnál) az észlelt hang frekvenciája megduplázódik (feleződik), azaz a hang magassága egy oktávval emelkedik (csökken).



b) A hullámforrás mozog, és a megfigyelő áll. A megfigyelőhöz v_f sebességgel közeledő hangforrás a $t = 0$ időpillanatban sugározza ki a rezgés első fázisát, míg T_0 idő múlva (amikor a hangforrás már $v_f \cdot T_0$ szakasszal közelebb van a megfigyelőhöz) a rezgés utolsó fázisát. Emiatt a hullámhossz a hullámforrás előtt $v_f \cdot T_0$ hosszal (azaz λ_0 - $v_f \cdot T_0$ értékre) megrövidül (lásd az ábrát). Mivel azonban a megrövidült hullámok a nyugvó közegben szintén c sebességgel terjednek, ezért az észlelt frekvencia $f = c/(\lambda_0 - v_f \cdot T_0)$. A hullámforrás közeledése (–) ill. távolodás (+) esetén észlelt frekvencia

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{v_f}{c}}.$$

Vegyük észre, hogy az a) és b) esetekben kapott kifejezések v_f –re és v_m –re nézve nem szimmetrikusak, azaz az észlelt frekvenciaváltozásra nem egyszerűen a forrás és a megfigyelő relatív sebessége a mérvadó (ellentétben az optikai Doppler-effektussal, lásd alább). Ennek az az oka, hogy a közvetítő közeg lényeges szerepet játszik a frekvenciaváltozás meghatározásában.

A két kifejezést egyesítő összefüggés:

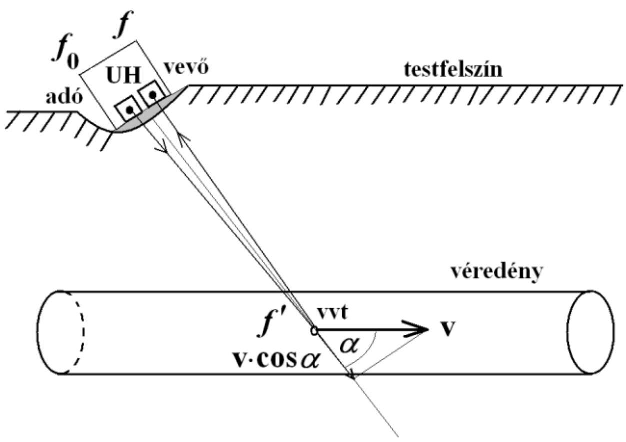
$$f = f_0 \frac{1 - \frac{v_m}{c}}{1 - \frac{v_f}{c}},$$

ahol v_f ill. v_m az F forrás (adó), ill. az M megfigyelő (vevő)(közeghez viszonyított) sebességének az FM összekötő egyenes menti komponense, amely $\overrightarrow{FM}$ irányban pozitívnak, az ellentétes irányban negatívnak számítandó. Természetesen, ha az FM távolság nem változik meg (pl. rá merőleges irányú az elmozdulás), akkor az ilyen mozgás (ill. az általános mozgás ilyen komponense) nem hoz létre Doppler-eltolódást.

Az optikai Doppler-effektus (vöröseltolódás) a fizikai lényegét tekintve különbözik az akusztikai Doppler-effektustól, mert az előbbiben nincs közvetítő közeg („éter”), így csak a forrás és a megfigyelő relatív sebessége (v) számít. Az einsteini relativitáselméletből (pontosabban a Lorentz-transzformációból) származóan

$$f = f_0 \frac{1 \pm \frac{\mathrm{v}}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} \qquad \text{ha} \quad \mathrm{v} \ll c, \quad \text{akkor} \quad f = f_0\left(1 \pm \frac{\mathrm{v}}{c}\right),$$

ahol a pozitív előjelet akkor kell venni, amikor a forrás és a megfigyelő közti távolság csökken. A fény terjedési sebességéhez (c) képest sokkal kisebb sebességek esetén a relativisztikus korrekció elhanyagolható, és a klasszikus esetet kapjuk vissza.



A vér áramlási sebességének meghatározása a Doppler-elv alapján. Az adót és a vevőt is magában foglaló Doppler-szondát a vizsgálandó érszakasz fölött egy kis folyadékcseppel a test felületére illesszük. A vörös vértest (vvt) pillanatnyi v sebesség vektora α szöget zár be a Doppler szonda irányával, vagyis mind az adótól, mind a vevőtől v·cos α sebességgel távolodik. Az adó által kisugárzott f_0 frekvenciájú hullám a vvt-n szóródik, és egy része visszajut a vevőbe. Az általa detektált hullám f frekvenciáját két folyamat együttesen határozza meg. 1) A vvt az UH adó f_0 frekvenciáját

$$f' = f_0\left(1 - \frac{\mathrm{v} \cdot \cos\alpha}{c}\right)$$

frekvenciájúnak észleli (álló hangforrás és távolodó megfigyelő esete). 2) A vvt, mint sugárforrás f' frekvenciáját az UH vevő

$$f = f' \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{v} \cdot \cos\alpha}{c}}$$

értékűnek detektálja (távolodó hangforrás és álló megfigyelő esete). A két egyenletből f' kiküszöbölhető:

$$\Delta f = f - f_0 = -2 f_0 \frac{\frac{\mathrm{v}\cos\alpha}{c}}{1 + \frac{\mathrm{v}\cos\alpha}{c}}.$$

Mivel a vvt sebessége nagyságrendekkel kisebb, mint a hang terjedési sebessége (v << c), ezért a nevező 1-nek vehető:

$$\Delta f = -2 f_0 \frac{\cos\alpha}{c} \cdot \mathrm{v},$$

azaz a Doppler-eltolódás a vvt sebességével egyenesen arányos, és az arányossági tényező a cos α irányfaktortól függ. Ha a sugárzás iránya éppen merőleges a vvt pillanatnyi sebességére ($\alpha = 90^o$), akkor nincs Doppler eltolódás. Maximális a Doppler eltolódás, ha az irány tangenciális ($\alpha = 0^o$), azaz a sebességvektor a sugárzás irányával esik egybe.

Frekvencia-optimum a vér sebességének meghatározására.
A Doppler-eltolódás az alkalmazott ultrahang frekvenciájával arányos, azaz minél nagyobb a frekvencia, annál pontosabban lehet a sebességet meghatározni:

$$\Delta f = \mathrm{const}_1 \cdot f$$

Sajnos azonban a visszavert hang (echo) intenzitása ezzel ellentétes irányú, mert lágy szövetekben a diagnosztikus tartományban (2-20 MHz) az abszorpciós és szórási veszteségi együtthatók összege (α) a frekvenciával arányosan növekszik:

$$\alpha = \text{const}_2 \cdot f \ .$$

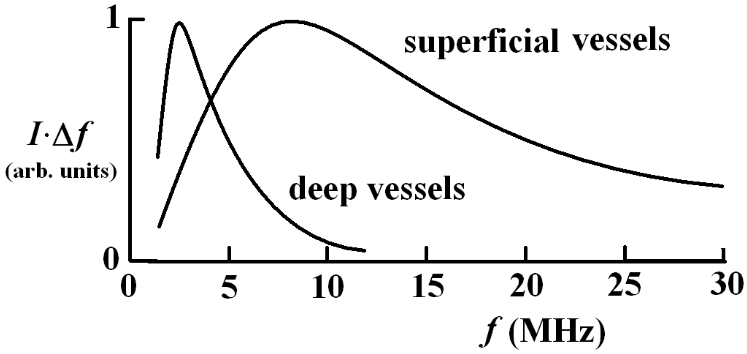
A d mélységben levő vvt-ről származó echo intenzitása az I_0 beeső intenzitásról a távolsággal exponenciálisan csökkenve

$$I = \text{const}_3 I_0 \exp(-\alpha \cdot 2d)$$

értékű lesz (az ultrahang 2d hosszúságú utat fut be, míg visszajut a detektorba). Optimális frekvenciának azt fogjuk tekinteni, amelyre az $I \cdot \Delta f$ szorzat maximális. Ennek szükséges (és ilyen „szabályos" függvényeknél általában elégséges) feltétele, hogy az $I \cdot \Delta f$ szorzat f szerinti első differenciálhányadosa tűnjön el: $d(I \cdot \Delta f)/df = 0$, amely feltételből

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{2d \cdot \text{const}_2}$$

adódik.

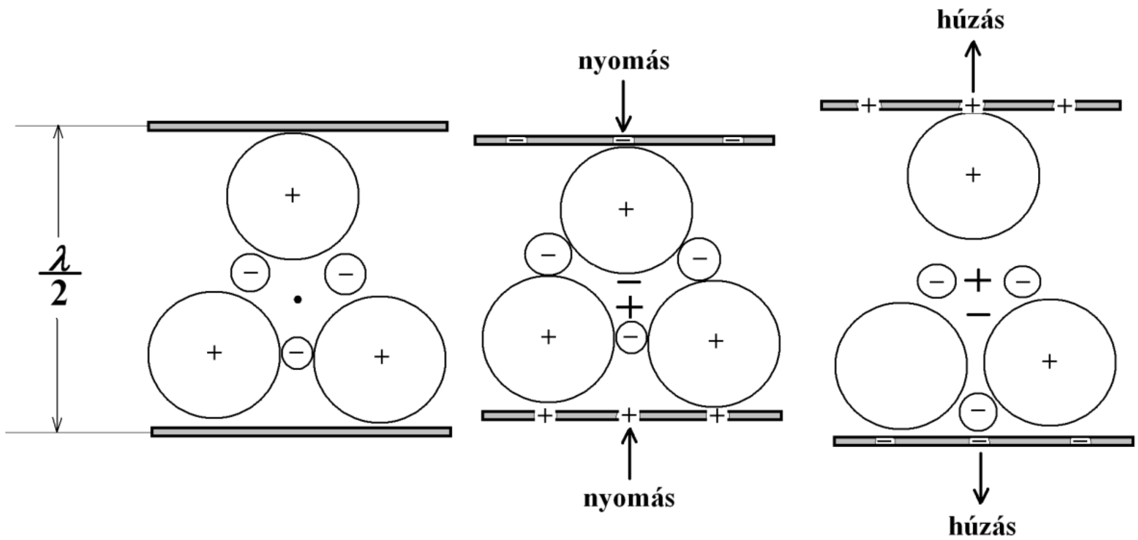


Az ábra a különböző (de fix) konstansokra kapott $I \cdot \Delta f$ értékeket mutatja felületi és mélységi véredényekre. Mindkét görbe maximumon megy át, a mélységi erekhez kisebb, a felületi erekhez nagyobb frekvencia tartozik. A mélységi véredényeknél a görbe élesebb, míg a felületi véredényeknél szélesebb, laposabb, és így az utóbbinál a megfelelő (optimális) frekvencia választása nem annyira kritikus. A gyakorlatban az

$$f_{\text{opt}} = \frac{90\ \text{MHz} \cdot \text{mm}}{d}$$

választás bizonyul megfelelőnek. Eszerint 2-3 MHz frekvenciát használnak a 3-4 cm mélységben levő leszálló aorta vizsgálatára, míg 5-10 MHz-et a felületi vérerek tanulmányozására.

Az ultrahangok keltése inverz (fordított) piezoelektromos jelenséggel történik. A



piezoelektromos kristályokban (pl. ólom-cirkonát-titanát (PZT), szintetikus kerámiák) a molekulák elektromos töltéseinek súlypontja a nyomás és az összehúzódás hatására változik. Ezt megfordítva a kristályt mechanikai rezgésre (periodikus nyújtásra és összehúzódásra) kényszeríthetjük, ha az elektródokra nagyfrekvenciás feszültséget teszünk, amely az előjelét $f = c/\lambda$ frekvenciával váltogatja. Ha a kristálymetszet vastagsága $\lambda/2$, akkor az alapharmonikus rezgést rezonanciával eredményesen gerjeszthetjük, hiszen ekkor az elektródáknál csomópontok, vagyis a kristályban $\lambda/2$ hosszúságú állóhullám alakulhat ki.

Az ultrahang orvosi alkalmazásai. Az ultrahang intenzitásától függően
- diagnosztika: képalkotás (vigyázat: minél jobb feloldást (élesebb képet) akarunk elérni, annál nagyobb intenzitással (ill. dózissal) kell számolnunk.),
- terápia: mechanikai hatás $I > 0{,}1$ W/cm^2 (kavitáció, gáztalanítás, diszpergálás, kromoszóma-törés $I > 1$ W/cm^2), hőhatás, kémiai hatás (depolimerizáció, festékek kifakítása) stb. és
- sebészet, urológia: lökéshullám (pl. vesekő-szétzúzás).

Veszély: a küszöbértékek csak többé-kevésbé ismertek, ezért kumulativ dózis-hatással is számolhatunk, akárcsak az ionizáló sugarak dozimetriájánál („lerakódik mint a guánó, keményen, vastagon").

Az alkalmazott ultrahang intenzitása szerinti közelítő felosztások:

1 MHz esetén vízben maximum-értékek	I =10 mW/cm^2 DIAGNOSZTIKA	I = 3 W/cm^2 TERÁPIA	Lökéshullám
kitérés: $x = \frac{\sqrt{2I/Z}}{\omega}$	2 nm	35 nm	Ezek a nagy intenzitású lökéshullámok gyakorlatilag egyetlen félhullámból állnak, ezért rájuk szigorúan nem érvényesek a harmonikus hullámokra megadott összefüggések.
relatív megnyújtás: $x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2I \cdot Z}}{E}$	8,4·10^{-6}	1,47·10^{-6}	
gyorsulás: $x \cdot \omega^2 = \omega\sqrt{\frac{2I}{Z}}$	2·10^3 m/s^2	3,5·10^4 m/s^2	
hangnyomás: $E\ x\frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{2I \cdot Z}$	2·10^4 Pa	3,5·10^5 Pa	40 MPa (!)

Ajánlott olvasnivalók

Budó Á.: Kísérleti Fizika, Tankönyvkiadó, Budapest 1965.
Holics L.: Fizika, 1. kötet Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
Damjanovich S, Fidy J, és Szöllősi J.: Orvosi biofizika, Medicina, Budapest, 2005.
Fercher A.F.: Medizinische Physik, Springer, Wien, New York 1999.
Maróti P. és Laczkó G.: Bevezetés a biofizikába, JATEPress Szeged (több kiadás).
Maróti P. és Tandori J.: Biofizikai feladatok, JATEPress, Szeged 1996.
Maróti P., Berkes I. és Tölgyesi F.: Biophysics Problems. A textbook with answers, Akadémiai Kiadó, Budapest 1998.
.

Ajánlott feladatok házi és/vagy szemináriumi feldolgozásra.

1) Mekkora a normál (kamarai) „egy-vonásos *a*” hang („bécsi „*a*”, 440 Hz) hullámhossza levegőben és vízben? Mekkorák ugyanezen értékek a magyar „*a*”hangra (435 Hz)? Mit tapasztalnánk, ha a zenekar erre a két „*a*” hangra hangolna?
2) A normál „egy-vonásos *a*” hang 440 Hz frekvenciájából kiindulva mekkora az „egy-vonásos *c*” hang frekvenciája a 12 hangból álló, „egyenletesen temperált” kromatikus hangsorban (amely főleg Bach zeneművei óta (1720) terjedt el)?
3) Mekkora a 80 cm hosszú nyitott, illetve zárt síp alaphangjának rezgésszáma?
4) Milyen frekvenciájú hangok erősödnek fel az emberi fül 2,5 cm hosszú külső hallójáratában, és csökkentik ezzel kissé a hallásküszöböt?
5) A bálnák nagyon érzékenyek az alacsony frekvenciájú víz alatti hangokra. Mekkora lehet a külső hallójáratának valószínűsíthető hossza, ha a hallásának érzékenységi maximuma 100 Hz?
6) A delfin 60 kHz frekvenciájú és 30 mW teljesítményű ultrahang-impulzusokkal térképezi fel a cápa mozgását. A cápa helyén az ultrahang intenzitása $1{,}5\cdot10^{-5}$ W/m^2. Mekkora a cápa és a delfin közötti távolság? Mekkora a cápa körüli vízmolekulának az ultrahang hatására történő elmozdulás-maximuma (amplitúdója)?
7) A kutyáknak nagyon kifinomult a hallásuk: a hallásküszöb $1\cdot10^{-15}$ W/m^2. Milyen intenzitásúnak hallják azt a hangot, amelyet az ember 50 dB-nek érez?
8) Három, egyenként 20 dB hangosságú hangforrás egyszerre szól. Mekkora lesz a hangérzet erőssége?
9) A középfül a dobhártyára érkező hangnyomást 20-szorosára (a hangintenzitást 400-szorosára) erősítve továbbítja a belső fül ovális ablakára. Hány dB-lel növekedne a hallásküszöb a középfül funkciójának kiesése miatt?
10) A pályaudvaron 10 m/s sebességgel szerelvény halad át, amelyre a mozdony 100 dB erősségű és 1 kHz frekvenciájú sípja figyelmeztet. A peronon a sínpártól 1 m-re állva mekkorának észleljük a hang erősségének és magasságának csökkenését a mozdony elhaladása után 5 másodperccel?
11) A denevér állandó frekvencián (80 kHz) üvöltöz, miközben elrepül egy fal mellett. A visszaverődött hangot 83 kHz-nek észleli. Milyen gyorsan repül?
12) Mekkora sugárirányú sebességgel távolodik tőlünk az a csillag, amelynek színképében a nátrium 589,6 nm hullámhosszú vonalára 592,0 nm érték adódik? A fény terjedési sebessége $3\cdot10^{8}$ m/s.
13) Két, egyenlő amplitúdójú és egyirányba terjedő hang hullámhossza levegőben 72,0 cm és 77,2 cm. Hallunk-e lebegést?
14) Egy 1 cm átmérőjű köralakú ultrahang-forrás vízben 1 MHz frekvencián sugároz. Mekkora lesz 4 cm távolságban az ultrahang-nyaláb átmérője?
15) Mekkora a törésszöge annak az ultrahang-hullámnak, amely 12^{o} szög alatt esik a levegő ($c_{\text{levegő}}$ = 343 m/s) – izomszövet (c_{izom} = 1590 m/s) határfelületre?
16) Mekkora az ultrahang visszaverődési és áthatolási aránya izomszövet ($Z = 1{,}7\cdot10^{6}$ kg·m^{-2}·s^{-1}) és zsírszövet ($Z = 1{,}35\cdot10^{6}$ kg·m^{-2}·s^{-1}) határán?
17) Gyűjtik vagy szórják az ultrahang-sugarakat a vízben levő légbuborékok, azaz gyűjtő- vagy szórólencseként működnek?
18) Mekkora az 1 MHz frekvenciájú ultrahang behatolási mélysége tüdőszövetbe (7 cm^{-1}), csontba (3 cm^{-1}), izomba (0,3 cm^{-1}) és vérbe (0,03 cm^{-1})? Zárójelben az abszorpciós (elnyelési) és szórási veszteségi együtthatók összege szerepel.
19) A máj 10 cm mélységi metszetét vizsgáljuk 1 MHz frekvenciájú és 1 W/cm^2 intenzitású ultrahanggal. A besugárzás 10 s-ig tart. Mennyire melegedhet fel a vizsgált terület? A májban az abszorpciós (elnyelési) és szórási veszteségi együtthatók összege 0,17 cm^{-1}, és tekintsük a májat hőtani szempontból víznek, azaz a hőkapacitása 4,2 J/gK.

20) A szemészetben a szürkehályog-műtét során szükség lehet a műanyaglencse helyes beültetésének ellenőrzésére, amit egyszerű ultrahang-echo kísérlettel lehet megtenni („A-kép-technika”). A szaruhártya elülső oldalát mechanikai kontaktusba hozzuk egy piezoelektromos ultrahang adó/vevővel, és a szem belső felületeiről visszavert jeleket oszcilloszkóp képernyőjén figyeljük. A következő jeleket láthatjuk. „A” – kezdőecho, amely az adó és a kontaktfolyadék határfelületéről származik, „B” – a szaruhártya elülső és hátulsó felületeiről visszaverődött kettős (nehezen elkülönülő) echo, „C” és „D” – a szemlencse elülső és hátsó felületeiről származó echo és „E” – a szemgolyó hátsó faláról történő visszaverődés. Mekkora a szemgolyó hossza, ha a „B” és „E” echók közti idő-távolság 30 μs, és a szemben a hang terjedési sebessége 1600 m/s?

21) Szürkehályog műtéteknél a homályossá vált szemlencsét alacsony frekvenciájú (23 kHz), nagy intenzitású (1 kW/cm^2) és a magnetostrikció elvén működő ultrahang-forrással emulzifikálják, majd a cornea és a sclera között ejtett metszési nyíláson az emulziót leszívják. Mekkora az alkalmazott ultrahangforrás amplitúdója? A szemlencse akusztikus impedanciája $1{,}75 \cdot 10^6\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.